

الباب الثالث: التكاملات المعتلة

١ التكاملات المعتلة

درسنا من قبل مفهوم تكامل ريمان للدوال، وسنذكر القارئ بحقيقتين هامتين:

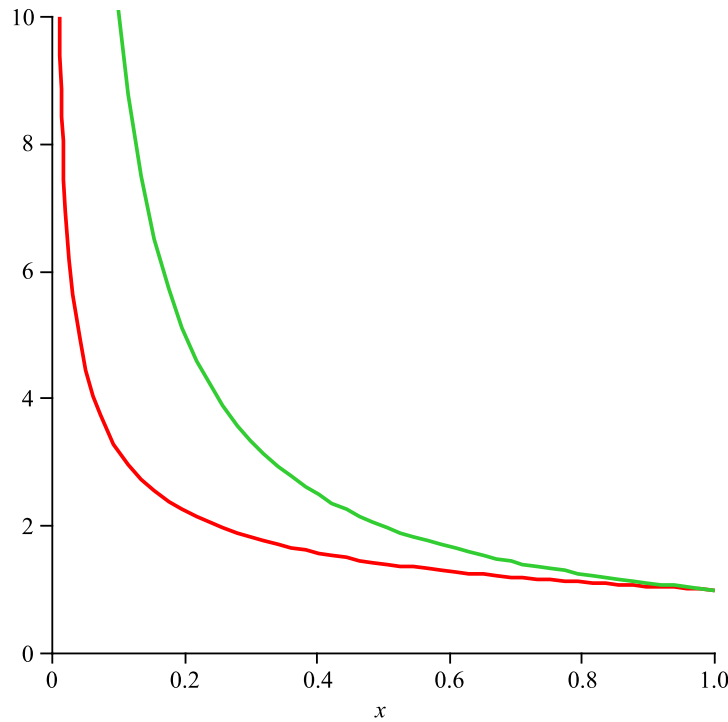
(أ) تكامل ريمان معرف فقط على فترة محدودة ومغلقة.

(ب) أي دالة غير محدودة ليس لها تكامل ريمان (وذلك لأن تجميعات داربو العلوية أو السفلية ليس لها نهاية).

من الطبيعي إذن أن نتساءل عن مفهوم التكامل على فترة مفتوحة أو غير محدودة أو أن نحاول دراسة التكامل لدالة غير محدودة. مثل هذه التكاملات تسمى **تكاملات معتلة**، وعندما تكون فترة التكامل $[a, b]$ حيث $b = \infty$ أو الدالة المكاملة غير محدودة عندما $x \rightarrow b$ فإننا نقول أن b طرف معتل للتكامل.

١-١- مثالان:

(أ) لنكن $f(x) = x^{-1/2}, x \in]0, 1]$ هل المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور x منتهية؟



منحنى $f(x) = 1/\sqrt{x}$ (بالأحمر)، $g(x) = 1/x$ (بالأخضر)

نلاحظ أننا لو أخذنا أي $a > 0$ وحسبنا تكامل ريمان

$$\int_a^1 f(x) dx = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{a} < 2$$

بالتالي نجد أن المساحة تحت منحنى الدالة لا يمكن أن تزيد عن 2.

(٢) لكن لو درسنا الدالة $g(x) = 1/x$ بنفس الطريقة لوجدنا أن

$$\int_a^1 g(x) dx = \ln 1 - \ln a = -\ln a$$

وبتجربة قيم مختلفة (قريبة من الصفر) ل a نجد أن المساحة تزيد عن أي عدد معطى ، أي أن المساحة تحت منحنى $g(x)$ في الفترة $]0, 1]$ غير محدودة.

التعريفات الأولية

يشير المثالان السابقان لأن المساحة المحصورة تحت المنحنى لدالة غير محدودة قد تكون منتهية أو غير منتهية، في الحالة الأولى نقول أن الدالة لها تكامل معتل تقاربي بينما نقول في الحالة الثانية أن التكامل المعتل للدالة غير تقاربي أو تباعدي .

٢-١- تعريفات:

(١) لتكن $f(x)$ دالة معرفة على فترة محدودة $[a, b]$ بحيث تكون قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على أي فترة مغلقة $[c, b]$ محتواة في $[a, b]$ ، نقول أن التكامل المعتل $\int_{a+}^b f(x) dx$ تقاربي إذا كان

$$\lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx = A \in \mathbb{R}.$$

(٢) لتكن $f(x)$ دالة معرفة على فترة غير محدودة $[b, +\infty[$ بحيث تكون قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على أي فترة مغلقة $[b, M]$ ، نقول أن التكامل المعتل $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ تقاربي إذا كان

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_b^M f(x) dx = A \in \mathbb{R}.$$

النهاية A تؤخذ كقيمة للتكامل المعتل. يمكن بالمثل تعريف التكاملات المعتلة على الصورة

$$\int_a^{b-} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

المثالان السابقان يوضحان أن التكامل المعتل $\int_{0+}^1 x^{-1/2} dx$ تقاربي بينما التكامل المعتل $\int_{0+}^1 x^{-1} dx$ تباعدي. سنعمم هذه النتيجة في النظرية البسيطة التالية:

٣-١- نظرية: لتكن $p > 0$ ، ولتكن $f(x) = x^{-p}$.

(١) التكامل المعتل $\int_{0+}^1 f(x) dx$ تقاربي إذا وفقط إذا كان $p < 1$.

(٢) التكامل المعتل $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ تقاربي إذا وفقط إذا كان $p > 1$.

برهان - سنثبت (١) ونترك (٢) كتمرين للقارئ.
لتكن $p < 1$ ولتكن $0 < c < 1$ ، من المعلوم أن

$$\int_c^1 x^{-p} dx = \frac{1}{1-p}(1 - c^{1-p})$$

وبالتالي

$$\lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 x^{-p} dx = \frac{1}{1-p}.$$

أما إذا كانت $p \geq 1$ فإن $\int_c^1 x^{-p} dx = \frac{1}{1-p}(1 - c^{1-p})$ (عندما $p > 1$) أو $-\ln c$ (عندما $p = 1$). ومن الواضح أن النهاية

$$\lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 x^{-p} dx$$

نساوي المالانهاية في الحالتين لأن الأس $1 - p$ سالب.

فيما يلي بعض الخواص الجبرية للتكاملات المعتلة، نذكرها لحالة الفترات المحدودة ونترك صياغة الخواص المماثلة للتكاملات المعتلة على فترات غير محدودة للقارئ.

٤-١- نظرية:

(١) إذا كان كلا من التكاملين $\int_{a+}^b f(x) dx$ و $\int_{a+}^b g(x) dx$ تقاربي فإن $\int_{a+}^b (f(x) + g(x)) dx$ تقاربي ويساوي مجموعهما.

(٢) إذا كان $\int_{a+}^b f(x) dx$ تقاربي فإن $\int_{a+}^b \lambda f(x) dx$ تقاربي لأي $\lambda \in \mathbb{R}$.

(٣) إذا كان $\int_{a+}^b f(x) dx$ تقاربي فإن $\int_{a+}^c f(x) dx$ تقاربي لأي $c \in]a, b[$.

برهان - مباشر من جبر النهايات.

يمكننا تعريف أشكال أخرى للتكاملات المعتلة كما يلي:

٥-١- تعريف:

(١) إذا كانت $f(x)$ غير محدودة عند كل من a, b ومحدودة على أي فترة جزئية $[c, d] \subset]a, b[$ فإننا بأخذ أي $c \in]a, b[$ نعرف

$$\int_{a+}^{b-0} f(x) dx = \int_{a+}^c f(x) dx + \int_c^{b-0} f(x) dx$$

(٢) إذا كانت $f(x)$ غير محدودة عند $s \in]a, b[$ ومحدودة على أي فترة جزئية $[c, d] \subset [a, s[\cup]s, b]$ فإننا نعرف

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c-0} f(x) dx + \int_{c+0}^b f(x) dx$$

شرط كوشي للتقارب

لدراسة أعمق للتكاملات المعتلة سنحتاج لدراسة تقارب التكامل دون معرفة النهاية، وذلك لأن إيجاد النهاية قد يكون متعذرا في كثير من الحالات.

٦-١- نظرية: شرط كوشي للتقارب:

(١) التكامل المعتل $\int_{a+}^b f(x) dx$ تقاربي إذا وفقط إذا كان:
لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث لأي فترة $[c, d] \subset]a, a + \delta[$ يكون

$$\left| \int_c^d f(x) dx \right| < \varepsilon$$

(٢) التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ تقاربي إذا وفقط إذا كان:
لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $L > a$ بحيث لأي فترة $[c, d] \subset [L, +\infty[$ يكون

$$\left| \int_c^d f(x) dx \right| < \varepsilon$$

برهان - سنثبت (٢) ونترك (١) كتمرين للقارئ.

($\Rightarrow$) نفرض أن التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x) dx = A$ ، وليكن $\varepsilon > 0$ معطى. إذن

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx = A$$

من تعريف النهاية نجد أنه يوجد $L > a$ بحيث لأي $c \geq L$ يكون

$$\left| \int_a^c f(x) dx - A \right| < \varepsilon/2$$

بأخذ $d > c \geq L$ نجد أن

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d f(x) dx \right| &= \left| \int_a^d f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^d f(x) dx - A \right| + \left| \int_a^c f(x) dx - A \right| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) نفرض نحقق شرط كوشي، فنجد لأي $\varepsilon > 0$ يوجد $L(\varepsilon) > a$ نحقق لأي $d > c \geq L$ يكون

$$\left| \int_c^d f(x) dx \right| < \varepsilon$$

يمكننا أن نفرض أن $L(\varepsilon_1) > L(\varepsilon_2) \implies \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ، بالتالي نجد

$$\int_a^{L(\varepsilon_1)} f(x) dx - \varepsilon_1 < \int_a^{L(\varepsilon_2)} f(x) dx < \int_a^{L(\varepsilon_1)} f(x) dx + \varepsilon_1$$

نأخذ $\varepsilon = 1$ ونختار قيمة L_1 المناظرة ونضع $A_1 = \int_a^{L_1} f(x) dx - 1$ ، ثم نُعرّف المجموعة

$$E = \{ A \in \mathbb{R} \mid \exists L > L_1 : \int_a^c f(x) dx > A \forall c > L \}$$

من الواضح أن $A_1 \in E$ ، كما يمكن إثبات أن العدد $M_1 = \int_a^{L_1} f(x) dx + 1$ هو حد علوي للمجموعة E .

من خاصية الاكتمال للأعداد الحقيقية نعلم أن $A_0 = \sup E$ موجود في $\mathbb{R}$ ، سنبرهن أن $A_0 = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$.

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، من تعريف أصغر حد علوي نستنتج أنه يوجد $B \in E$ بحيث $A_0 - \varepsilon < B \leq A_0$ ، لهذا العدد B يوجد L_B بحيث $\int_a^c f(x) dx > B > A_0 - \varepsilon$ لكل $c > L_B$ ، نختار L_ε مناظرة لقيمة $\varepsilon/3$ ومحقة لشرط كوشي، ونأخذ $L = \max(L_B, L_\varepsilon)$ ، بالتالي لأي $c > L$ يكون

$$\int_a^c f(x) dx > A_0 - \varepsilon \quad , \quad \int_a^{L_\varepsilon} f(x) dx - \varepsilon/3 < \int_a^c f(x) dx < \int_a^{L_\varepsilon} f(x) dx + \varepsilon/3$$

إذا وجدنا $c_0 > L$ بحيث

$$\int_a^{c_0} f(x) dx > A_0 + \varepsilon$$

فإن لأي $c > L$:

$$A_0 + \varepsilon/3 < \int_a^{c_0} f(x) dx - 2\varepsilon/3 < \int_a^{L_\varepsilon} f(x) dx - \varepsilon/3 < \int_a^c f(x) dx$$

وينتج من ذلك أن $A_0 + \varepsilon/3 \in E$ وهو ما يناقض حقيقة أن $A_0 = \sup E$. ينتج إذن أن $c > L$

$$A_0 - \varepsilon < \int_a^c f(x) dx < A_0 + \varepsilon$$

وهو ما يثبت المطلوب.

٧-١- مثالان:

(١) لنكن $f(x) = \cos(x^a)$ حيث $a > 0$ التكامل

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

يسمى تكامل فرسnel (Fresnel integral). سنثبت نقارب هذا التكامل لأي $a > 1$.

لأي $d > c > 0$ نجد من التكامل بالتعويض أن

$$\int_c^d \cos(x^a) dx = \frac{1}{a} \int_{c^{1/a}}^{d^{1/a}} y^{-1+\frac{1}{a}} \cos(y) dy$$

ثم بالتجزئ ينتج

$$\int_c^d \cos(x^a) dx = \frac{1}{a} y^{-1+\frac{1}{a}} \cos(y) \Big|_{c^{1/a}}^{d^{1/a}} - \frac{1}{a} \left(-1 + \frac{1}{a}\right) \int_{c^{1/a}}^{d^{1/a}} y^{-2+\frac{1}{a}} \sin(y) dy$$

ومن ذلك

$$\left| \int_c^d \cos(x^a) dx \right| \leq \left| \frac{1}{a} y^{-1+\frac{1}{a}} \Big|_{c^{1/a}}^{d^{1/a}} \right| + \frac{1}{a} \left| -1 + \frac{1}{a} \right| \int_{c^{1/a}}^{d^{1/a}} y^{-2+\frac{1}{a}} dy$$

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، من معرفتنا بتقارب التكامل $\int_1^{+\infty} y^{-2+\frac{1}{a}} dy$ (من نظرية سابقة) وباستخدام شرط كوشي، يمكن إيجاد L_1 بحيث لأي $d > c > L_1$:

$$\frac{1}{a} \left| -1 + \frac{1}{a} \right| \int_{c^{1/a}}^{d^{1/a}} y^{-2+\frac{1}{a}} dy < \varepsilon/2$$

وحيث أن $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-1+\frac{1}{a}} = 0$ فإنه يوجد L_2 نحقق

$$d > c > L_2 \text{ لأي } \left| \frac{1}{a} y^{-1+\frac{1}{a}} \Big|_{c^{1/a}}^{d^{1/a}} \right| < \varepsilon/2$$

بالتالي إذا كان $d > c > \max(L_1, L_2)$ فإن

$$\left| \int_c^d \cos(x^a) dx \right| < \varepsilon$$

ومن شرط كوشي للتقارب ينتج المطلوب.

(٢) لندرس التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ، باستخدام التكامل بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| -\frac{\cos x}{x} \Big|_c^d - \int_c^d \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{c} \right| + \left| \frac{1}{d} \right| + \int_c^d \frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، من تقارب التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ وباستخدام شرط كوشي يمكن إيجاد L_1 بحيث

$$d > c > L_1 \implies \int_c^d \frac{1}{x^2} < \varepsilon/2$$

كما يمكن إيجاد $L_2 > 4/\varepsilon$ وبذلك يكون

$$d > c > \max(L_1, L_2) \text{ لأي } \left| \int_c^d \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon$$

ومن شرط كوشي للتقارب ينتج المطلوب.

التقارب المطلق والتقارب المشروط

رأينا في المثال السابق أن $\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx$ تقاربي. هل $\int_1^{+\infty} |\cos(x^2)| dx$ تقاربي هو الآخر؟ يمكننا إجابة هذا السؤال بالنفي باستخدام شرط كوشي للتقارب. فلو اخترنا $c = \sqrt{2n\pi - \pi/4}, d = \sqrt{2n\pi + \pi/4}$ سنجد أن $|\cos(x^2)| > 1/\sqrt{2}$ لكل $x \in [c, d]$ ، مما يؤدي إلى أن $\int_c^d |\cos(x^2)| dx > \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ، الآن لو كان $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ فلائي L يمكن إيجاد n بحيث $c, d > L$ لكن $\int_c^d |\cos(x^2)| dx > \varepsilon$ ، يتضح من ذلك أن شرط كوشي للتقارب غير متحقق، أي أن التكامل تباعدي.

٨-١- تعريف: يقال أن التكامل المعتل للدالة $f(x)$ تقاربي مطلق إذا كان التكامل المعتل للدالة $|f(x)|$ تقاربي هو الآخر. أما إذا كان التكامل المعتل للدالة $f(x)$ تقاربي والتكامل المعتل للدالة $|f(x)|$ تباعدي فإننا نقول أن تقارب التكامل الأول هو تقارب مشروط.

٩-١- نظرية: تقارب $\int_{a+}^b |f(x)| dx$ يستلزم تقارب $\int_{a+}^b f(x) dx$.

برهان - من خواص تكامل ريمان أن

$$\left| \int_c^d f(x) dx \right| \leq \int_c^d |f(x)| dx$$

وبالتالي فإن نحقق شرط كوشي للتكامل $\int_{a+}^b |f(x)| dx$ يستلزم نحقق نفس الشرط للتكامل $\int_{a+}^b f(x) dx$.

١٠.١ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

- (١) التكامل المعتل $\int_0^{+\infty} x^{-p} dx$ () تقاربي إذا كانت $p \leq 1$ ()
 () دائما تباعدي () دائما تقاربي إذا كانت $p > 1$
- (٢) تقارب التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ () ينتج لو كانت $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ()
 () يستلزم $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$ () يكافئ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
- (٣) إذا كانت $f(x)$ دالة غير محدودة على الفترة $[a, b]$ فإن ()
 () $\int_a^{b-0} f(x) dx$ غير معرف () $\int_a^{b-0} f(x) dx$ تقاربي
 () $\int_a^b f(x) dx$ تباعدي () $\int_a^b f(x) dx$ غير موجود كتكامل ريمان
- (٤) إذا كان التكامل المعتل $\int_0^1 |f(x)| dx$ تباعدي فإن ()
 () $\int_0^1 f(x) dx$ غير معرف () $\int_0^1 f(x) dx$ تقاربي
 () $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 |f(x)| dx$ () $\int_0^1 f(x) dx$ تباعدي

١١.١ تمارين.

(١) برهن نظرية التكامل بالتعويض للتكاملات المعتلة: إذا كانت $g:]c, d[\rightarrow]a, b[$ دالة قابلة للإشتقاق على $]c, d[$ وكانت $g'(t) \neq 0$ ، وإذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على $]a, b[$ فإن

$$\int_{a+}^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt$$

(٢) برهن نظرية التكامل بالتجزئ للتكاملات المعتلة: إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a+0} u(x)v(x)$ موجودة في $\mathbb{R}$ وكان التكامل المعتل $\int_{a+}^b u(x) dv(x)$ تقاربي فإن التكامل $\int_{a+}^b v(x) du(x)$ تقاربي ويحقق

$$\int_{a+}^b v(x) du(x) = u(b)v(b) - \lim_{x \rightarrow a+0} u(x)v(x) - \int_{a+}^b u(x) dv(x)$$

(٣) إدرس تقارب كل من التكاملات الآتية

- (١) $\int_0^1 \frac{1}{x \ln x} dx$ (٥) $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$
 (ب) $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$ (و) $\int_0^{\pi/2} \tan x dx$
 (ج) $\int_{e+1}^\infty \frac{1}{x^p \ln x} dx$ (ز) $\int_0^{\pi/2} \sec^2(x) \sqrt{\tan(x)} dx$
 (د) $\int_{e+1}^\infty \frac{1}{x^p \ln x \ln \ln x} dx$ (ح) $\int_1^5 \frac{1}{(x-1)(5-x)} dx$

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x-1)^2(5-x)^{1/2}} dx \quad (\text{ط})$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx \quad (\text{ي})$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{يا})$$

(٤) لتكن

$$f(x) = \begin{cases} n, & x \in [n, n + \frac{1}{n^{2^n}}], n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

برهن أن $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ تقاربي ، بينما $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$

(٥) برهن أن تقارب التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ يستلزم أن

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L f(x) dx \in \mathbb{R}$$

(٦) أعط مثالا لدالة $f(x)$ بحيث $\lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L f(x) dx \in \mathbb{R}$ لكن $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ تباعدي.